



الدرس

المُتَتاليَاتُ التراجِعيَةُ والبرهانُ بِالتراجُعِ

❶ - عموميات حول المتتاليات

1 - 1 تعريف

المتتالية هي دالة U معرفة على المجموعة IN أو جزء من IN

اصطلاحات :

- نرمز إلى صورة العدد الطبيعي n بالرمز U_n بدلا من $U(n)$.
- نرمز إلى المتتالية بالرمز (U_n) بدلا من U
- U_n يدعى الحد العام للمتتالية (U_n) أو الحد ذو الدليل n

ملاحظة

هناك طريقتان لتوليد متتالية .
1) تعيين متتالية بإعطاء العبارة الصريحة للحد العام .
2) تعيين متتالية بعلاقة تراجعية .





مثال -

ثلاث متتاليات معرفة بـ : (U_n) ، (V_n) ، (W_n)

$U_n = (-\frac{1}{2})^n$ ، $V_n = g(n)$ حيث $g: x \mapsto x^2+1$ و $W_{n+1} = 3W_n - 1$ مع $W_0 = 2$

- المتتاليتان (U_n) و (V_n) معرفتان بحديهما العام وأما المتتالية (W_n) فهي تراجعية.

1 - 2 اتجاه تغير متتالية

- القول أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} > U_n$
- القول أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} < U_n$
- القول أن المتتالية (U_n) ثابتة يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = U_n$

ملاحظة

بنفس الكيفية السابقة نعرف المتتالية المتزايدة أو المتناقصة وذلك بتبديل المتباينة $U_{n+1} > U_n$ بـ $U_{n+1} \geq U_n$ (المتباينة $U_{n+1} < U_n$ بالمتباينة $U_{n+1} \leq U_n$)

مثال -

(U_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعبارة $U_n = 3n+5$

و منه الحد U_{n+1} معرف بـ $U_{n+1} = 3(n+1)+5 = 3n+8 = U_n+3$

بما أن $3 > 0$ فإن (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

1 - 3 المتتالية الحسابية

- القول أن المتتالية (U_n) حسابية يعني أنه يوجد عدد حقيقي r بحيث من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_{n+1} = U_n + r$ ، يدعى r أساس المتتالية (U_n)
- من أجل كل عددين طبيعيين m و P يكون $U_m = U_P + (m-p)r$
- مجموع حدود متعاقبة لمتتالية حسابية

- إذا كان $S = P + \dots + d$ هو مجموع m حد لمتتابعة من متتالية حسابية فإن:

$S = \frac{m}{2}(P+d)$

مثال -

ليكن S مجموع الأعداد الطبيعية المتتالية $1, 2, \dots, n$

لاحظ أن S هو مجموع n حد أول لمتعاقبة من متتالية حسابية حدها الأول 1

وحدها الأخير n و أساسها $r=1$ و منه فإن $S = \frac{n}{2}(1+n)$

1 - 4 المتتالية الهندسية

- القول أن (U_n) متتالية هندسية يعني أنه يوجد عدد حقيقي q بحيث أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_{n+1} = q \times U_n$ ، ويدعى q أساس المتتالية (U_n)
- من أجل كل عددين طبيعيين m و P يكون $U_m = U_p \times q^{m-p}$
- مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية

إذا كان $S = p + \dots + d$ هو مجموع m حد المتتابعة لمتتالية هندسية حدها الأول p و أساسها q فإن $S = p \times \frac{1-q^m}{1-q}$ حيث $(q \neq 1)$

مثال -

S مجموع الأعداد الحقيقية المعرف بـ $S = 1 + q + \dots + q^{n-1}$

S عبارة عن مجموع n حد أول من حدود متتالية هندسية حدها الأول 1

و أساسها q إذن $S = \frac{1-q^n}{1-q}$

تمرن تدريبي 1

(U_n) متتالية معرفة بـ $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = \frac{U_n}{1+U_n}$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

1) عين الحدود الخمسة الأولى لهذه المتتالية ثم استنتج عبارة الحد العام U_n

2) نفرض أن $U_n \neq 0$ و نضع $V_n = \frac{1}{U_n}$

أ- بين أن المتتالية (V_n) حسابية يطلب تعين حدها الأول و أساسها .

ب- استنتج عبارة V_n ثم U_n بدلالة n

✓ الحل :

1) $U_1 = \frac{U_0}{U_0+1} = \frac{1}{2}$ ، $U_2 = \frac{U_1}{U_1+1} = \frac{1}{3}$ ، $U_3 = \frac{U_2}{U_2+1} = \frac{1}{4}$ ، $U_4 = \frac{U_3}{U_3+1} = \frac{1}{5}$ ،

$U_5 = \frac{U_4}{U_4+1} = \frac{1}{6}$

نلاحظ أن الحدود الأولى لهذه المتتالية تكتب على الشكل $U_n = \frac{1}{n+1}$

2) أ) حتى تكون (V_n) حسابية يجب أن يوجد عدد حقيقي r بحيث من أجل كل عدد طبيعي n يكون $V_{n+1} - V_n = r$

$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} = \frac{1+U_n}{U_n} - \frac{1}{U_n} = 1$

ومنه (V_n) متتالية حسابية أساسها $r=1$ و حدها الأول $V_0 = \frac{1}{U_0} = 1$

ب) عبارة الحد العام V_n هي $V_n = V_0 + n \times r$ بالتعويض نجد :

$V_n = 1+n$ و منه $U_n = \frac{1}{1+n}$

تمرن تدريبي ❷

- عين خمسة حدود موجبة من متتالية هندسية $U_1 , U_2 , U_3 , U_4 , U_5$ مع العلم أن $U_1 \times U_5 = 25$ و $U_2 + U_3 + U_4 = \frac{35}{2}$

✓ الحل :

$$U_1 \times U_5 = U_1 \times U_1 \times r^4 = \left(U_1 \times r^2\right)^2 = (U_3)^2$$

و بما أن $U_1 \times U_5 = 25$ فإن $U_3 = 5$

المساواة $U_2 + U_3 + U_4 = \frac{35}{2}$ تصبح $U_2 + U_4 = \frac{25}{2}$

بما أن U_3 الوسط الهندسي لـ U_2 و U_4 فإن $U_2 \times U_4 = U_3^2 = 25$

إذن $\begin{cases} U_2 \times U_4 = 25 \\ U_2 + U_4 = \frac{25}{2} \end{cases} \quad .... (I)$

بعد حل الجملة (I) نجد $U_1 = \frac{5}{4}$ ، $U_2 = \frac{5}{2}$ ، $U_3 = 5$ ، $U_4 = 10$ ، $U_5 = 20$

❷ - البرهان بالتراجع

2 - 1 أهمية البرهان بالتراجع :



في الرياضيات توجد بعض الخواص تتعلق بعدد طبيعي n مثلا

$1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$ نرمز إلى هذه الخاصية بـ P_n .

- نستطيع القول أن P_1 صحيحة لأن $1 = \frac{1(1+1)}{2}$

P_2 صحيحة لأن $1+2 = \frac{2(2+1)}{2}$

P_3 صحيحة لأن $1+2+3 = \frac{3(3+1)}{2}$

لكن هل P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ؟ إذا كان كذلك فكيف نبينه مع العلم أنه لا يمكن التحقق من ذلك بالحساب لأن مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ غير منتهية
البرهان بالتراجع يسمح لنا باستنتاج صحة الخاصية P_n من أجل كل $n \geq 1$ و بالتالي فهو وسيلة تسمح بالمرور من المنتهي إلى اللامنتهي .

2 - 2 مبدأ البرهان بالتراجع :

للبرهان على أن الخاصية P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$ نتبع خطوتين أساسيتين هما :

1) نتحقق أن P_{n_0} صحيحة .

2) نفرض أن الخاصية P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n كيفي و على هذا الفرض نبين أن الخاصية P_{n+1} صحيحة

إذا تحقق الشرطان السابقان معا نستنتج أن الخاصية P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$

ملاحظة

- الفرضية " P_n صحيحة " تسمى فرضية التراجع

تمرن تدريبي ❶

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 1 يكون :

$$1^2+2^2+3^2+ \ .... \ +n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

✓ الحل :

من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ نسمي P_n الخاصية

$$1^2+2^2+3^2+ \ .... \ +n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- P_1 صحيحة لأن $1^2 = 1$ و $\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$

- نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n و نبرهن صحة P_{n+1} أي:

$$1^2+2^2+3^2+ \ .... \ +(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} .$$

لتوظيف فرضية التراجع نكتب ،

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n+1)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + n^2 + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

لأن $2n^2+7n+6=(n+2)(2n+3)$

إذن الخاصية P_{n+1} صحيحة و عليه فان الخاصية P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n\geq1$

تمرين تدريبي 2

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد 10^n-1 يقبل القسمة على 9

✓ الحل

من أجل كل عدد طبيعي n نسمي P_n الخاصية " العدد 10^n-1 يقبل القسمة على 9"

- بما أن $10^0-1=0$ و الصفر يقبل القسمة على 9 فإن P_0 صحيحة .
- نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي $n\geq0$ أي $10^n-1=9k$ حيث $k\in\mathbb{N}$

و نبرهن أن P_{n+1} صحيحة أي $10^{n+1}-1=9k'$

لتوظيف فرضية التراجع نكتب :

$$10^{n+1}-1 = 10^n\times10-1 = 10^n(1+9)-1 = (10^n-1)+9\times10^n$$
$$=9k+9\times10^n = 9(k+10^n)=9k'$$

إذن P_{n+1} صحيحة وعليه فإن الخاصية P_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي .

تمرين تدريبي 3

برهن بالتراجع ان من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون $2^n>n$.

✓ الحل :

- P_1 صحيحة لأن $2^1>1$
- تفرض ان P_n صحيحة من اجل عدد طبيعي $n\geq1$ اي $2^n>n$ و نبرهن ان P_{n+1} صحيحة اي $2^{n+1}>n+1$.

بضرب طرفي المتباينة $2^n>n$ بالعدد 2 نجد $2^{n+1}>2n$ ... (1)

و لدينا من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $2n\geq n+1$ ... (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $2^{n+1}>n+1$

إذن P_{n+1} صحيحة وعليه فان الخاصية P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم .

تطبيقات نموذجية

تطبيق . 1

دراسة اتجاه تغير متتالية

- ما هي المتتاليات الرتيبة من بين المتتاليات المعطاة ؟

أ) $U_n=3n+5$ ، جـ) $U_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+ \dots +\frac{1}{2^n}-n$

ب) $U_n=n!$ ، د) $U_{n+1}=\frac{3}{5}U_n+4$ و $U_0=7$

✓ الحل :

لمعرفة اتجاه تغير متتالية نعين إشارة المقدار $U_{n+1}-U_n$

أ) $U_{n+1}-U_n=[3(n+1)+5]-(3n+5)=3$

بما ان من كل عدد طبيعي n لدينا $U_{n+1}-U_n>0$ فان (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب) $n!=n(n-1)\times \dots \times2\times1$ مع $n\geq1$

$$U_{n+1}-U_n = (n+1)n(n-1)\times \dots \times2\times1-n(n-1)\times \dots \times2\times1$$
$$=n(n-1)\times \dots \times2\times1\,[n+1-1] = (n!)\times n$$

بما ان $n!>0$ و $n\geq1$ فان $(n!)\times n>0$ و بالتالي المتتالية (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}^*$

جـ) $$U_{n+1}-U_n=\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+ \dots +\frac{1}{2^{n+1}}-n-1\right]-\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+ \dots +\frac{1}{2^n}-n\right] = \frac{1}{2^{n+1}}-1$$

من اجل كل عدد طبيعي n لدينا $2^{n+1}>2^0$ بقلب طرفي المتباينة نجد $\frac{1}{2^{n+1}}<1$

و بطرح 1 من طرفي هذه الأخيرة نجد $\frac{1}{2^{n+1}}-1<0$ أي $U_{n+1}-U_n<0$

بالتالي (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

د) $$U_{n+1}-U_n = \frac{3}{5}U_n+4-U_n = -\frac{2}{5}U_n+4 = -\frac{2}{5}(U_n-10)$$

لمعرفة إشارة $U_{n+1}-U_n$ لابد من معرفة إشارة U_n-10 .

من اجل $n=0$ نجد $U_0-10<0$ و بالتالي $U_{n+1}-U_n>0$ صحيحة من اجل $n=0$.

هل الخاصية $U_n-10<0$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي ؟ للإجابة عن ذلك نستعمل البرهان بالتراجع :

نسمي P_n الخاصية $U_n-10<0$

- P_0 صحيحة لأن $U_0-10<0$

- نفرض أن P_n صحيحة أي $U_n-10<0$ و نبرهن أن P_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1}-10<0$

$$U_{n+1}-10=\frac{3}{5}U_n+4-10=\frac{3}{5}U_n-6=\frac{3}{5}(U_n-10)$$

بما أن $U_n-10<0$ فإن $\frac{3}{5}(U_n-10)<0$ و عليه فإن $U_{n+1}-10<0$ إذن P_{n+1} صحيحة

و بالتالي الخاصية P_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي و عليه فالمتتالية (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

تطبيق . 2 دراسة رتابة متتالية

نعرف من اجل كل عدد طبيعي n المتتاليتين (U_n) و (V_n) كما يلي :

$U_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$ و $V_n=U_{2n}-U_n$

برهن أن المتتالية (V_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

✓ الحل :

لكي تكون المتتالية (V_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ يجب أن يكون $V_{n+1}-V_n>0$ من اجل كل عدد طبيعي n .

$$V_{n+1}-V_n=(U_{2n+2}-U_{n+1})-(U_{2n}-U_n)=(U_{2n+2}-U_{2n})-(U_{n+1}-U_n)$$

$$=\left(\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+1}\right)-\left(\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2(n+1)+2n+1-2(2n+1)}{2(2n+1)(n+1)}$$

$$=\frac{1}{2(2n+1)(n+1)}$$

بما أن $\frac{1}{2(2n+1)(n+1)}>0$ فإن $V_{n+1}-V_n>0$ و بالتالي المتتالية (V_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

تطبيق . 3 حساب مجموع متتالية هندسية

(U_n) متتالية هندسية أساسها 5 و حدها الأول $U_1=-2$.

1) عبر عن U_n بدلالة n

2) احسب $U_1+U_2+\dots+U_7$

3) لتكن (V_n) متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n بالعبارة : $V_n=U_{2n}$ احسب المجموع $V_1+V_2+\dots+V_n$ بدلالة n .



✓ الحل

1) $U_n=U_1\times q^{n-1}$ حيث q هو الأساس و U_1 الحد الأول

بتعويض قيمة q و U_1 في عبارة U_n نجد $U_n=-2\times5^{n-1}$

2) $U_1+U_2+\dots+U_7=U_1\times\frac{1-q^7}{1-q}=-2\times\frac{1-5^7}{1-5}=\frac{1-5^7}{2}$

3) $\frac{V_{n+1}}{V_n}=\frac{U_{2n+2}}{U_{2n}}=\frac{-2\times5^{2n+2-1}}{-2\times5^{2n-1}}=5^2=25$

إذن (V_n) متتالية هندسية أساسها $q'=q^2$ و حدها الأول $V_1=U_2$ و منه

$$V_1+V_2+\dots+V_n=V_1\times\frac{1-q'^n}{1-q'}=U_2\times\frac{1-(q^2)^n}{1-q^2}=U_2\times\frac{1-q^{2n}}{1-q^2}$$

$$=-10\times\frac{1-5^{2n}}{1-25}=\frac{5}{12}(1-5^{2n})$$

تطبيق . 4 تعيين أساس متتالية هندسية

(U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحيث من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم ،

$$\sum_{p=1}^{n}U_p=\frac{3^n-1}{2}$$

1) احسب $U_4+U_5+U_6+U_7+U_8+U_9$

2) بين أن (U_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها و حدها الأول U_1 .

✓ الحل :

1) $S_1=U_1+U_2+U_3=\frac{3^3-1}{2}=13$

$S_2=U_1+U_2+\dots U_9=\frac{3^9-1}{2}=9841$

$S_2-S_1=U_4+U_5+\dots+U_9=9841-13=9828$

2) (1) .... $U_1+U_2+\dots+U_{n-1}=\frac{3^{n-1}-1}{2}$

(2) .... $U_1+U_2+\dots+U_n=\frac{3^n-1}{2}$

بطرح طرفي (1) و (2) طرفا لطرف نجد $U_n=\frac{3^n-1}{2}-\frac{3^{n-1}-1}{2}=\frac{3^n}{2}-\frac{3^{n-1}}{2}=3^{n-1}$

بما أن (U_n) معرفة على $\mathbb{N}^*$ فإن حدها الأول هو $U_1=3^{1-1}=1$ و أساسها $r=3$.

تطبيق . 5 — البرهان بالتراجع و إثبات المساواة

(U_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي:
$U_1=1$ و $U_2=3$ و $U_{n+2}=3U_{n+1}-2U_n$

1) من أجل $n\ge 1$ نضع $V_n=U_{n+1}-U_n$

أ) ما هي طبيعة المتتالية (V_n) ؟

ب) استنتج عبارة V_n بدلالة n.

2) بين بالتراجع ان $U_{n+1}-U_1=\sum_{r=1}^{n}V_r$ ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n.

✓ **الحل :**

1) أ) $V_{n+1} = U_{n+2}-U_{n+1} = 3U_{n+1}-2U_n-U_{n+1}$
$= 2U_{n+1}-2U_n = 2(U_{n+1}-U_n) = 2V_n$

ومنه (V_n) متتالية هندسية اساسها $q=2$ و حدها الأول $V_1=U_2-U_1=2$

ب) $V_n = V_1\times q^{n-1} = 2\times 2^{n-1} = 2^n$

2) نسمي P_n الخاصية $U_{n+1}-U_1=\sum_{r=1}^{n}V_r$

P_1 صحيحة لأن $U_2-U_1 = 3-1 = 2$ و $\sum_{r=1}^{1}V_r = V_1 = 2$

• نفرض ان P_n صحيحة من اجل عدد طبيعي n اي $U_{n+1}-U_1=\sum_{r=1}^{n}V_r$

و نبرهن ان P_{n+1} صحيحة اي $U_{n+2}-U_1=\sum_{r=1}^{n+1}V_r$

$U_{n+2}-U_1=3U_{n+1}-2U_n-U_1 = 2(U_{n+1}-U_n)+U_{n+1}-U_1$
$= 2V_n+\sum_{r=1}^{n}V_r = V_{n+1}+\sum_{r=1}^{n}V_r = \sum_{r=1}^{n+1}V_r$

إذن P_{n+1} صحيحة و عليه فإن P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم.

- لدينا $U_n-U_1=\sum_{r=1}^{n-1}V_r$

و منه $U_n = U_1+\sum_{r=1}^{n-1}V_r$

$U_n=U_1+V_1\dfrac{1-q^{n-1}}{1-q} = 1+2\times\dfrac{1-2^{n-1}}{1-2} = -1+2^n$

تطبيق . 6 — تعيين أساس متتالية هندسية

نعتبر (U_n) متتالية الأعداد الحقيقية معرفة من أجل كل عدد طبيعي اكبر من أو يساوي الواحد بالعلاقة $U_{n+1}=\frac{4}{10}-\frac{3}{10}U_n$ و $U_1=a$ مع a عدد حقيقي معطى، و لتكن (V_n) متتالية الأعداد الحقيقية معرفة من أجل كل طبيعي $n\ge 1$ بـ $V_n=13U_n-4$

1) بين ان (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها k

2) اكتب V_n بدلالة n و a ثم استنتج U_n بدلالة n و a

✓ **الحل :**

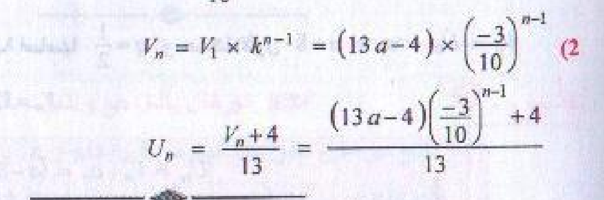
1) $V_{n+1} = 13U_{n+1}-4 = 13\times\frac{4}{10}-13\frac{\times 3}{10}U_n-4 = \frac{26}{5}-\frac{39}{10}\left(\frac{V_n+4}{13}\right)-4$
$= \frac{26}{5}-\frac{3}{10}(V_n+4)-4 = \frac{26}{5}-\frac{12}{10}-\frac{3}{10}V_n-4 = -\frac{3}{4}V_n$

إذن (V_n) متتالية هندسية أساسها $k=\frac{-3}{10}$ و حدها الأول $V_1=13U_1-4=13a-4$



2) $V_n = V_1\times k^{n-1} = (13a-4)\times\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1}$

$U_n = \dfrac{V_n+4}{13} = \dfrac{(13a-4)\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1}+4}{13}$



تطبيق . 7 — متتالية كثير حدود . المتتالية الهندسية

(U_n) متتالية معرفة على IN بـ $U_0=a$ و $U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+n^2+n$ ....(1)

1) اوجد كثير حدود من الدرجة الثانية $P(x)$ بحيث المتتالية (a_n) ذات الحد العام $a_n=P(n)$ تحقق العلاقة (1)

2) بين أن المتتالية (V_n) ذات الحد العام $V_n=U_n-a_n$ هندسية.

3) اكتب V_n ثم U_n بدلالة n و a

✓ **الحل :**

1) $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\delta$ حيث $\alpha=0$

إذن $a_n=\alpha n^2+\beta n+\delta$ (a_n) تحقق العلاقة (1) وهذا معناه أن :

$$\alpha(n+1)^2+\beta(n+1)+\delta=\frac{1}{2}\alpha n^2+\frac{1}{2}\beta n+\frac{1}{2}\delta+n^2+n$$

بعد النشر و التبسيط نجد :

$$\left(\frac{1}{2}\alpha-1\right)n^2+\left(2\alpha+\frac{1}{2}\beta-1\right)n+\alpha+\beta+\delta-\frac{1}{2}\delta=0 \quad .... (2)$$

المساواة (2) محققة من أجل كل عدد طبيعي إذا فقط إذا كان :

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\alpha-1=0\\ 2\alpha+\frac{1}{2}\beta-1=0\\ \alpha+\beta+\frac{1}{2}\delta=0\end{cases}$$

بعد حل هذه الجملة نجد $\alpha=0$ و $\beta=-6$ و $\delta=8$

إذن $P(x)=2x^2-6x+8$

(2 $V_{n+1}=U_{n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+n^2+n-2(n+1)^2+6(n+1)-8$

$$=\frac{1}{2}(U_n-2n^2+6n-8)=\frac{1}{2}\left[U_n-(2n^2-6n+8)\right]$$

$$=\frac{1}{2}(U_n-a_n)=\frac{1}{2}V_n$$

إذن (V_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ و حدها الأول $V_0=U_0-a_0=a-8$

(3 $V_n=V_0\times q^n=(a-8)(\frac{1}{2})^n$

$$U_n=V_n+a_n=(a-8)\left(\frac{1}{2}\right)^n+2n^2-6n+8$$

تطبيق . 8 تعيين ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية

a , b , c ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية حيث $abc=64$

و $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{7}{8}$ عين الأعداد الحقيقية a , b , c

الحل :

بما أن a , b , c ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية فإن $ac=b^2$

$\begin{cases}abc=64\\ ac=b^2\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}b^3=64\\ ac=b^2\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}b=4\\ ac=16\end{cases}$



بتعويض قيمة b في المساواة $\frac{7}{8}=\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}$ نجد $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{5}{8}$

إذن (1) .... $\begin{cases}ac=16\\ \frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{5}{8}\end{cases}$

(1) تكافئ $\begin{cases}c=\frac{16}{a}\\ \frac{1}{a}+\frac{1}{\frac{16}{a}}=\frac{5}{8}\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}c=\frac{16}{a}\\ \frac{1}{a}+\frac{a}{16}=\frac{5}{8}\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}c=\frac{16}{a}\\ \frac{16+a^2}{16a}=\frac{5}{8}\end{cases}$

تكافئ $\begin{cases}c=\frac{16}{a}\\ \frac{16+a^2}{2a}=5\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}c=\frac{16}{a}\\ a^2-10a+16=0\end{cases}$

$a^2-10a+16=0$

$\Delta'=25-(1)(16)=9$ و منه $a_1=8$ و $a_2=2$

$a=a_1$ يكافئ $c_1=\frac{16}{8}=2$ منه $(a,b,c)=(8,4,2)$

$a=a_2$ يكافئ $c_2=\frac{16}{2}=8$ منه $(a\ ,\ b\ ,\ c)=(2,4,8)$

تطبيق . 9 البرهان بالتراجع و إثبات المساواة

نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$S_n=1\times2+2\times3+\ ....\ +n(n+1)$ و $T_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $S_n=T_n$.

الحل :

نسمي P_n الخاصية " $S_n=T_n$ "

- P_1 صحيحة لأن $S_1=1\times2=2$ و $T_1=\frac{1}{3}\times1(1+1)(1+2)=2$

- نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $S_n=T_n$ و نبرهن صحة P_{n+1} أي

$S_{n+1}=T_{n+1}$

$$S_{n+1}=1\times2+2\times3+\dots+(n+1)(n+2)$$

$$=1\times2+2\times3+\dots+n(n+1)+(n+1)(n+2)$$

$$=S_n+(n+1)(n+2)=T_n+(n+1)(n+2)$$

$$= \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2) = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3) = T_{n+1}$$

إذن P_{n+1} صحيحة و عليه فإن الخاصية P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم .

تطبيق . 10 البرهان بالتراجع و إثبات متباينة

من أجل كل عدد طبيعي n نسمي P_n الخاصية $3^n \geq (n+2)^2$

1) هل P_0 ، P_1 ، P_2 ، P_3 صحيحة ؟

2) بين بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$ ، P_n صحيحة .

✓ الحل :

1) بما أن $3^0 = 1$ و $(0+2)^2 = 4$ فإن المتباينة $1 \geq 4$ خاطئة و بالتالي P_0 خاطئة .

- بما أن $3^1 = 3$ و $(1+2)^2 = 9$ و المتباينة $3 \geq 9$ خاطئة فإن P_1 خاطئة
- بما أن $3^2 = 9$ و $(2+2)^2 = 16$ و المتباينة $9 \geq 16$ خاطئة فإن P_2 خاطئة
- بما أن $3^3 = 27$ و $(3+2)^2 = 25$ و المتباينة $27 \geq 25$ صحيحة و بالتالي P_3 صحيحة

2) P_3 صحيحة من السؤال 1.

- نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n اي $3^n \geq (n+2)^2$ و نبرهن أن P_{n+1} صحيحة اي $3^{n+1} \geq (n+3)^2$.

بضرب المتباينة $3^n \geq (n+2)^2$ بالعدد 3 نجد (1) ... $3^{n+1} \geq 3(n+2)^2$

لكي تكون P_{n+1} صحيحة يجب أن يكون (2) .... $3(n+2)^2 \geq (n+3)^2$

(2) تكافئ $3(n+2)^2 - (n+3)^2 \geq 0$ تكافئ $2n^2+6n+3 \geq 0$

x		$\frac{-6-\sqrt{12}}{4}$		$\frac{-6+\sqrt{12}}{4}$		$+\infty$ $-\infty$
$2x^2+6x+3$	+	0	-	0	+	

من الجدول نستنتج ان $2n^2+6n+3 \geq 0$ من أجل كل عدد طبيعي و بالتالي المتباينة (2) صحيحة إذن من (1) و (2) نستنتج ان $3^{n+1} \geq (n+3)^2$ و عليه فالخاصية P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$.

تطبيق . 11 البرهان بالتراجع و إثبات متباينة

نضع $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ حيث $n \geq 1$ و يقرأ " عاملي n "

برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n! \geq 2^{n-1}$

✓ الحل

نسمي P_n الخاصية " $n! \geq 2^{n-1}$ "

. P_1 صحيحة لأن $1! = 1$ و $2^{1-1} = 2^0 = 1$ و المتباينة $1 \geq 1$ صحيحة .

. نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n اي $n! \geq 2^{n-1}$

و نبرهن صحة P_{n+1} اي $(n+1)! \geq 2^n$

بضرب طرفي المتباينة $n! \geq 2^{n-1}$ بالعدد $(n+1)$ نجد $(n+1)\times(n!) \geq (n+1)2^{n-1}$ لكن $(n+1)\times(n!) = (n+1)!$ و عليه و المتباينة الأخيرة تصبح

(1) .... $(n+1)! \geq (n+1)\times 2^{n-1}$

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n+1 \geq 2$

بضرب طرفي المتباينة $n+1 \geq 2$ بالعدد 2^{n-1} نجد $(n+1)2^{n-1} \geq 2^n$ ... (2)

من (1) و (2) نجد $(n+1)! \geq 2^n$

إذن P_{n+1} صحيحة و بالتالي الخاصية P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم .

تطبيق . 12 البرهان بالتراجع و قابلية القسمة

برهن انه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $5^{2n+1}-5$ يقبل القسمة على 6 .

✓ الحل

نسمي P_n الخاصية " $5^{2n+1}-5$ يقبل القسمة على 6 ".

- P_0 صحيحة لأن $5^{0+1}-5=0$ و الصفر يقبل القسمة على 6.
- نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n اي $5^{2n+1}-5=6\alpha$ مع $\alpha \in \mathbb{N}$ و نبرهن صحة P_{n+1} اي $5^{2n+3}-5=6\beta$ مع $\beta \in \mathbb{N}$

$$5^{2n+3}-5 = 5^{2n+1}\times 5^2 - 5 = 5^{2n+1}(24+1) - 5 = 5^{2n+1} - 5 + 24\times 5^{2n+1}$$

$$= 6\alpha + 24\times 5^{2n+1} = 6(\alpha + 4\times 5^{2n+1}) = 6\beta$$

إذن P_{n+1} صحيحة و بالتالي P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي .

تطبيق 13 . البرهان بالتراجع و قابلية القسمة

برهن على صحة الخاصية P_n : " $3^{2n+1}+2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7 " من اجل كل عدد طبيعي n

✓ الحل

- P_0 صحيحة لأن $3^{0+1}+2^{0+2}=7$ و 7 مضاعف للعدد 7.
- نفرض ان P_n صحيحة من اجل عدد طبيعي n اي $3^{2n+1}+2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7

و نبرهن صحة P_{n+1} اي " $3^{2n+3}+2^{n+3}$ مضاعف للعدد 7 "

$$3^{2n+3}+2^{n+3} = 3^{2n+1}\times 3^2 + 2^{n+2}\times 2^1$$
$$= 2^{2n+1}\times(7+2) + 2^{n+2}\times 2$$
$$= 7\times 3^{2n+1} + 2\times 3^{2n+1} + 2\times 2^{n+2} = 7\times 3^{2n+1} + 2\left(3^{2n+1}+2^{n+2}\right)$$
$$= 7\times 3^{2n+1} + 2\times 7\alpha$$
$$= 7\left(3^{2n+1}+2\alpha\right) = 7\beta$$

إذن P_{n+1} صحيحة و منه فإن P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي.

تطبيق 14 . البرهان بالتراجع و قابلية القسمة

ليكن α و β عددين طبيعيين غير معدومين بحيث $\alpha\neq\beta$

1) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون $\alpha^n-\beta^n$ يقبل القسمة على $\alpha-\beta$.

2) استنتج أن $6^{3n+3}-7^{n+1}$ يقبل القسمة على 209 .

✓ الحل

1) نسمي P_n الخاصية " $\alpha^n-\beta^n$ يقبل القسمة على $\alpha-\beta$ "

- P_0 صحيحة لأن $\alpha^0-\beta^0=0$ و 0 يقبل القسمة على $\alpha-\beta$
- نفرض ان P_n صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي n اي $\alpha^n-\beta^n=\lambda(\alpha-\beta)$ و

نبرهن صحة P_{n+1} اي $\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}=\lambda'(\alpha-\beta)$

$$\alpha^{n+1}-\beta^{n+1} = \alpha^{n+1}-\beta^{n+1}+\beta\alpha^n-\beta\alpha^n = \left(\alpha^{n+1}-\beta\alpha^n\right)+\left(-\beta^{n+1}+\beta\alpha^n\right)$$
$$=\alpha^n(\alpha-\beta)+\beta\left(\alpha^n-\beta^n\right) = \alpha^n(\alpha-\beta)+\beta\times\lambda(\alpha-\beta)$$
$$=(\alpha-\beta)\left(\alpha^n+\beta\lambda\right) = (\alpha-\beta)\times\lambda'$$

إذن P_{n+1} صحيحة و عليه فإن P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي .

2) $6^{3n+3}-7^{n+1}=\left(6^3\right)^{n+1}-7^{n+1}=216^{n+1}-7^{n+1}$

من السؤال (1) نستنتج ان $216^{n+1}-7^{n+1}$ يقبل القسمة على $216-7$ اي يقبل القسمة على 209 .

تطبيق 15 . البرهان بالتراجع و قابلية القسمة

برهن انه من اجل كل عدد طبيعي $n\geq1$ ومن اجل كل عدد طبيعي $a\geq1$ يكون العدد $a\left(a^{2n}-1\right)$ قابلا القسمة على 6 .

✓ الحل

نسمي P_n الخاصية $a\left(a^{2n}-1\right)$ يقبل القسمة على 6 .

نضع $\alpha_{(a,n)}=a\left(a^{2n}-1\right)$

1) من اجل $n=1$ يكون $\alpha_{(a,1)}=a\left(a^2-1\right)$

نبرهن بالتراجع ان العدد $\alpha_{(a,1)}$ يقبل القسمة على 6 .

نسمي q_a الخاصية $\alpha_{(a,1)}$ يقبل القسمة على 6 .

- q_1 صحيحة لأن $\alpha_{(1,1)}=0$ و الصفر يقبل القسمة على 6 .
- نفرض أن q_a صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي اي $\alpha_{(a,1)}=6\lambda$ و نبرهن صحة q_{a+1} اي $\alpha_{(a+1,1)}=6\lambda'$

$$\alpha_{(a+1,1)} = (a+1)\left((a+1)^2-1\right) = (a+1)\left(a^2-1+2a+1\right)$$
$$= a\left(a^2-1\right)+\left(a^2-1\right)+(a+1)(2a+1) = 6\lambda+(a+1)(3a)$$

لاحظ ان العدد $a(a+1)$ زوجي، وبالتالي فالعدد $3a(a+1)$ يقبل القسمة على 6 .

إذن $\left(\alpha_{a+1,1}\right)=6\lambda+6k=6(\lambda+k)=6\lambda'$

منه q_{a+1} صحيحة و بالتالي q_a صحيحة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم .

و عليه فإن P_1 صحيحة .

2) نفرض أن P_n صحيحة اي $a\left(a^{2n}-1\right)=6\beta$

و نبرهن صحة P_{n+1} صحيحة اي $a\left(a^{2n+2}-1\right)=6\beta'$

$$a\left(a^{2n+2}-1\right) = a\left[a^{2n+2}-1+a^2-a^2\right]$$
$$= a\left[a^2\left(a^{2n}-1\right)+\left(a^2-1\right)\right]$$
$$= a^2a\left(a^{2n}-1\right)+a\left(a^2-1\right)$$
$$= a^2\times6\beta+6\lambda = 6\left(a^2\beta+\lambda\right) = 6\beta'$$

إذن P_{n+1} صحيحة و عليه P_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n\geq1$ و من اجل كل $a\geq1$.

تطبيق 16 . البرهان بالتراجع و إثبات متباينة مزدوجة

(U_n) متتالية معرفة بـ $U_0=1$ و من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :
$U_{n+1}=\sqrt{2+U_n}$

1) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n يكون $0 < U_n < 2$

2) بين أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما .

✓ الحل

1) نسمي P_n الخاصية $0 < U_n < 2$

- P_0 صحيحة لأن $0 < U_0 < 2$

- نفرض أن P_n صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي n اي $0 < U_n < 2$

و نبرهن صحة P_{n+1} اي $0 < U_{n+1} < 2$.

بإضافة 2 إلى حدود المتباينة $0 < U_n < 2$ نتحصل على $2 < U_n+2 < 4$

و بجذر حدود هذه الأخيرة نجد $0 < \sqrt{2} < \sqrt{2+U_n} < 2$ اي $0 < U_{n+1} < 2$

إذن P_{n+1} صحيحة وعليه فإن P_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي .

2) $U_{n+1}-U_n=\sqrt{2+U_n}-U_n=\frac{2+U_n-U_n^2}{\sqrt{2+U_n}+U_n}=\frac{(U_n-2)(-U_n-1)}{\sqrt{2+U_n}+U_n}$

بما أن $0 < U_n < 2$ فإن $-U_n-1 < 0$ و $U_n-2 < 0$

و بالتالي $\frac{(U_n-2)(-U_n-1)}{\sqrt{2+U_n}+U_n} > 0$

إذن (U_n) متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

تطبيق 17 . البرهان بالتراجع و إثبات المساواة

برهن انه من اجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ يوجد عددان طبيعيان a_n و b_n
بحيث $(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$

✓ الحل :

نسمي P_n الخاصية $(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$

- P_1 صحيحة لأن $(2+\sqrt{3})^1=a_1+b_1\sqrt{3}$ حيث $a_1=2$ و $b_1=1$

- نفرض أن P_n صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي n اي

$(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\times\sqrt{3}$ ....❶

و نبرهن أن P_{n+1} صحيحة اي $(2+\sqrt{3})^{n+1}=a_{n+1}+b_{n+1}\times\sqrt{3}$.

بضرب طرفي المساواة (1) بالعدد $2+\sqrt{3}$ نجد:

$(2+\sqrt{3})^{n+1}=(a_n+b_n\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$

بعد النشر و التبسيط نجد :

$(2+\sqrt{3})^{n+1}=(2a_n+3b_n)+\sqrt{3}(2b_n+a_n)$ ....❷

بوضع $a_{n+1}=2a_n+3b_n$ و $b_{n+1}=2b_n+a_n$

المساواة (2) تصبح :

$(2+\sqrt{3})^{n+1}=a_{n+1}+\sqrt{3}\,b_{n+1}$

و بما أن a_n و b_n عددان طبيعيان فإن a_{n+1} و b_{n+1} عددان طبيعيان .

إذن P_{n+1} صحيحة و عليه فإن P_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم .

تطبيق 18 . إثبات بالتراجع صحة تخمين

(U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $U_1=2$ و $U_{n+1}=\frac{2U_n-1}{U_n}$.

1) احسب U_2 , U_3 , U_4 ضع النتيجة على شكل كسر غير قابل للاختزال

2) خمن نتيجة عبارة الحد العام U_n .

3) برهن بالتراجع صحة التخمين المحصل عليه

✓ الحل :

1) $U_2=\frac{2U_1-1}{U_1}=\frac{3}{2}$ و $U_3=\frac{2U_2-1}{U_2}=\frac{4}{3}$ و ايضا $U_4=\frac{2U_3-1}{U_3}=\frac{5}{4}$

2) نلاحظ ان البسط و المقام عددان طبيعيان متتابعان اذن يمكن كتابة $U_n=\frac{n+1}{n}$

3) نسمي P_n الخاصية $U_n=\frac{n+1}{n}$.

- P_1 صحيحة لأن $U_1=\frac{2}{1}=\frac{1+1}{1}$

- نفرض أن P_n صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي اي $U_n=\frac{n+1}{n}$

و نبرهن أن P_{n+1} صحيحة اي $U_{n+1}=\frac{n+2}{n+1}$

$$U_{n+1} = \frac{2U_n - 1}{U_n} = \frac{2\left(\frac{n+1}{n}\right)-1}{\frac{n+1}{n}} = \frac{2n+2-n}{n}\times\frac{n}{n+1} = \frac{n+2}{n}\times\frac{n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

إذن P_{n+1} صحيحة و منه نستنتج أن P_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم

تطبيق 19 . تخمين عبارة حد عام لمتتالية و إثبات صحته بالتراجع

(U_n) متتالية معرفة على $I\!N$ ب $U_0 = 2$ و $U_{n+1} = 2U_n - 3$

1) احسب U_1 , U_2 , U_3 , U_4 , U_5 .

2) خمن عبارة الحد العام U_n ثم برهن على صحتها

3) بحساب $U_n - 3$ من اجل كل $n \geq 0$ عبر عن U_n بدلالة n (طريقة ثانية)

الحل

1) $U_1 = 2U_0 - 3 = 1$ ؛ $U_2 = 2U_1 - 3 = -1$ ، $U_3 = 2U_2 - 3 = -5$

$U_4 = 2U_3 - 3 = -13$ ، $U_5 = 2U_4 - 3 = -29$

2) يمكن كتابة

$U_1 = -2^1+3$ ، $U_2 = -2^2+3$ ، $U_3 = -2^3+3$ ، $U_4 = -2^4+3$

و $U_5 = -2^5+3$

و بالتالي يمكن كتابة U_n على الشكل $U_n = -2^n+3$

. نسمي P_n الخاصية $U_n = -2^n+3$.

. P_0 صحيحة لأن $U_0 = 2 = -2^0+3$.

. نفرض أن P_n صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي n اي $U_n = -2^n+3$

و نبرهن صحة P_{n+1} اي $U_{n+1} = -2^{n+1}+3$.

$$U_{n+1} = 2U_n - 3 = 2(-2^n+3)-3 = -2^{n+1}+3$$

منه P_{n+1} صحيحة و بالتالي P_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي .

3) $U_0 - 3 = 2-3 = -1 = -2^0$

$U_1 - 3 = 1-3 = -2 = -2^1$

$U_2 - 3 = -1-3 = -4 = -2^2$

$U_3 - 3 = -5-3 = -8 = -2^3$

$U_4 - 3 = -13-3 = -16 = -2^4$

نلاحظ أن $U_n - 3$ تكتب على الشكل : -2^n اي $U_n = -2^n+3$ (يمكنك إثبات ذلك بالتراجع)

تطبيق 20 . تخمين عبارة حد عام لمتتالية و إثبات صحته بالتراجع

(Q_n) متتالية كثيرة حدود معرفة من اجل كل عدد حقيقي x ب $Q_0(x)=1$

و من اجل كل عدد طبيعي n ومن اجل كل عدد حقيقي x لدينا

$$Q_{n+1}(x) = xQ_n(x+1)$$

1) اوجد $Q_1(x)$ ، $Q_2(x)$ و $Q_3(x)$ بدلالة x

2) خمن كتابة $Q_n(x)$ على شكل جداء عوامل.

3) برهن صحة هذا التخمين .

الحل

1) $Q_1(x) = xQ_0(x+1) = x\times 1 = x$

$Q_2(x) = xQ_1(x+1) = x(1+x)$

$Q_3(x) = xQ_2(x+1) = x(1+x)(x+2)$

2) من عبارات $Q_1(x)$ ، $Q_2(x)$ ، $Q_3(x)$ نستنتج انه يمكن كتابة

$$Q_n(x) = (x+0)(x+1)\times(x+2)\ \dots\ \times(x+n-1)$$

3) نسمي P_n الخاصية " $Q_n(x) = x(x+1)\times\ \dots\ \times(x+n-1)$ "

. P_1 صحيحة لأن $Q_1(x) = (x+0) = x$

. نفرض أن P_n صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي غير معدوم أي

$$Q_n(x) = x\ (x+1)\times\dots\times(x+n-1)$$

و نبرهن أن P_{n+1} صحيحة اي:

$$Q_{n+1}(x) = x(x+1)\times\ \dots\ \times(x+n)$$

$$Q_{n+1}(x) = xQ_n(x+1) = x\times(x+1)(x+2)\times\ \dots\ \times(x+1+n-1)$$

$$= x\times(x+1)(x+2)\times\dots\times(x+n)$$

إذن P_{n+1} صحيحة و عليه فإن P_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم .

تطبيق 21 . البرهان بالتراجع و إثبات المساواة

θ عدد حقيقي من المجال $\left]0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$ و (U_n) متتالية معرفة ب

$U_0 = 2\cos\theta$ ومن اجل كل عدد طبيعي $U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$.

1) احسب U_1 و U_2 .

2) بين بالتراجع انه من اجل عدد طبيعي $U_n = 2\cos\frac{\theta}{2^n}$

✓ **الحل**

1) $U_1=\sqrt{2+U_0}=\sqrt{2+2\cos\theta}=\sqrt{2+(1+\cos\theta)}$

$=\sqrt{2\times 2\cos^2\frac{\theta}{2}}=2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$

بما ان $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ فإن $\frac{\theta}{2}\in\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$ و بالتالي $\cos\frac{\theta}{2}\rangle 0$

إذن $U_1=2\cos\frac{\theta}{2}$



$U_2=\sqrt{2+U_1}=\sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2}}$

$=\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}=\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{4}}=2\cos\frac{\theta}{4}$

2) نسمي P_n الخاصية $U_n=2\cos\frac{\theta}{2^n}$

P_0 صحيحة لأن $U_0=2\cos\theta=2\cos\frac{\theta}{2^0}$

- نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أي $U_n=2\cos\frac{\theta}{2^n}$ و نبرهن صحة P_{n+1} أي $U_{n+1}=2\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$

$U_{n+1}=\sqrt{2+U_n}=\sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2^n}}=\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2^n}\right)}$

$=\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2^{n+1}}}=2\left|\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}\right|$

بما ان $\frac{\theta}{2^{n+1}}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ فإن $\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}\rangle 0$ و بالتالي $U_{n+1}=2\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$

إذن P_{n+1} صحيحة و عليه فإن P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي .

تمارين و مسائل

1 - (V_n) متتالية معرفة بـ $V_0=1$ و من اجل كل عدد طبيعي $V_{n+1}=3V_n-1$

احسب V_2 ثم عبر عن V_{n+2} بدلالة V_n .

2 - (U_n) متتالية عبارة حدها العام $U_n=\frac{n}{n^2+4}$.

عبر عن U_{n+1} ، U_{n-3} و U_{2n} بدلالة n.

3 - عين المتتالية الرتيبة من بين المتتاليات التالية :

1) $U_n=-2n+1$ ، 2) $U_n=\frac{n+2}{n+3}$

3) $U_n=n!$ ، 4) $U_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

5) $U_0=4$ و $U_{n+1}=\frac{5}{6}U_n+2$.

4 - من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $U_n=\frac{1}{n}$ و $V_n=\frac{-1}{n^2}$

ادرس رتابة المتتاليات التالية (U_n) ، (V_n) ، (U_n+V_n) ، $(U_n\times V_n)$

5 - نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=2$ و $U_1=4$ و $U_{n+1}=4U_n-U_{n-1}$

1) أوجد العددين الحقيقيين a و b بحيث $\begin{cases}a+b=4\\ab=1\end{cases}$

2) (V_n) متتالية بحيث $V_n=U_{n+1}-aU_n$ مع $n\in\mathbb{N}$

بين ان (V_n) هندسية أساسها b.

3) (W_n) متتالية بحيث $W_n=U_{n+1}-bU_n$ مع $n\in\mathbb{N}$

بين ان المتتالية (W_n) هندسية أساسها a .

4) اعط عبارة صريحة لـ V_n و W_n بدلالة n ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n .

6 - a ، b ، c ثلاثة أعداد حقيقية مختلفة و $a\neq 0$ ، بحيث a ، b ، c بهذا الترتيب

حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها q و $3a$ ، $2b$ ، c بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية حسابية. احسب q .

7 - (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ وبحيث انه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون $\sum_{P=1}^{n} U_P = 2n^2+7n$ بين أن (U_n) متتالية حسابية معينا أساسها .

8 - (U_n) متتالية معرفة بـ U_0 و علاقة تراجعية $U_{n+1}=\frac{U_n}{1+3U_n}$

1) احسب الأربعة الحدود الأولى لهذه المتتالية ثم استنتج مقلوب كل منها ماذا تلاحظ؟

2) باستعمال المتتالية (V_n) حيث $V_n=\frac{1}{U_n}$ أوجد عبارة U_n بدلالة n .

9 - نريد حفر بئر تكلفة المتر الأول هي $1000\ DA$ و كلما تعمقنا في الحفر تزداد تكلفة المتر الواحد بمقدار ثابت هو $1500\ DA$.

1) ما هي تكلفة البئر إذا حفرنا 30 متر؟

2) ما هو العمق الذي نصل إليه إذا كانت لدينا ميزانية $16000\ DA$ ؟

10 - (U_n) متتالية هندسية بحيث $U_1+U_2+U_3=465$ ، $U_1\times U_2\times U_3=421875$. احسب U_5 .

11 - 1) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم ،

$$1\times 2\times 3+2\times 3\times 4+\dots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

2) من أجل كل عدد طبيعي اكبر من او يساوي 2 نضع

$$S_n=1+2\times 2+3\times 2^2+\dots+(n-1)\times 2^{n-2}$$

برهن بالتراجع انه من أجل كل $n\ge 2$ يكون $S_n=(n-1)2^n-n\times 2^{n-1}+1$

3) a عدد حقيقي موجب تماما .

- برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $(1+a)^n\ge 1+na$

12 - برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n يكون ،

1) $2\times 6\times 10\times\dots\times(4n-2)=(n+1)(n+2)\dots(2n)$

2) $14n^3+9n^2+n$ يقبل القسمة على 6.

3) $2^{3n}-1$ مضاعف للعدد 7 .

13 - 1) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي $5+4\times 2^{2n}$ يقبل القسمة على 3 .

2) نضع $L_n=2^{2n}\left[\left(2^{2n+1}-1\right)-1\right]$

أ) بين ان $L_{n+1}-16L_n=3Q_n$ حيث $Q_n=5+4\times 2^{2n}$

ب) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي L_n يقبل القسمة على 9.

14 - a طول القطعة $[AB]$ و لتكن M_1 منتصف $[AB]$ ، M_2 منتصف $[BM_1]$ ، M_3 منتصف $[M_1M_2]$ ، M_n منتصف القطعة $[M_{n-2}M_{n-1}]$

بين بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي $AM_n=\sum_{r=1}^{r=n}\frac{(-1)^r a}{2^r}+a$



15 - (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=1$ و $U_{n+1}=\frac{U_n+1}{U_n+3}$

1) بين انه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $1\ge U_n\ge 0$

2) بين ان المتتالية (U_n) متزايدة .

16 - x عدد حقيقي، نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

$$C_n=\cos x+\cos 3x+\ \dots\ +\cos(2n-1)x$$

1) بين ان $\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$ و $\sin 2a=2\sin a\cos a$

2) حول العبارتين التاليتين إلى مجاميع $\sin(nx)\cos(nx)$ و $\sin x\cos(2n+1)x$

3) بين انه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n و من أجل كل عدد حقيقي x

$x\ne k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ لدينا $C_n=\frac{\cos(nx)\sin(nx)}{\sin x}$

17 - برهن بالتراجع ان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

$$\frac{1}{2}\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2^2}\tan\left(\frac{x}{2^2}\right)+\dots+\frac{1}{2^n}\tan\left(\frac{x}{2^n}\right)=\frac{1}{2^n\tan\left(\frac{x}{2^n}\right)}-\frac{1}{\tan(x)}$$

حيث $x\ne 2k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$

18 - برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم

$\sin x+\sin(2x)+\dots+\sin(nx)=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{1}{2}x}\times\sin\left(\frac{n}{2}x\right)$ حيث $x\ne 2k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$